Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 38, 30–31, 2012.

Максимальное взвешенное независимое множество прямоугольников

Э.Т. Пилипосян
Российско-Армянский (Славянский) университет
E-mail: eduard.piliposyan@gmail.com

На плоскости рассматривается множество прямоугольников M, стороны которых параллельны координатным осям. Считается, что все они расположены внутри некоторой большой прямоугольной рамки $\mathcal{M}$ и точно одной стороной опираются на какую-то ее сторону. Дополнительно предполагается, что все они имеют некоторый положительный вес. Предложенный в работе полиномиальный алгоритм в графе пересечений таких прямоугольников строит независимое множество максимального веса.

Задача нахождения максимального независимого множества является NP трудной как для графов вообще [1], так и для некоторых специальных классов графов пересечений прямоугольников. В частности, в [2] доказана, что задача является NP трудной для множества квадратов со стороной равной единице, а в [3] доказана NP трудность в случае, когда прямоугольники вырождены в отрезки параллельные к координатным осям.

Задача нахождения максимального независимого множества прямоугольников имеет широкое применение в таких областях, как интеллектуальный анализ данных (data mining) [4] и автоматизация размещения меток (automated label placement) [5].

Основные результаты

Прямоугольник назовем левосторонним, если его левая сторона опирается на левой стороне прямоугольной рамки $\mathcal{M}$. Множество левосторонних прямоугольников из M обозначим через M^L. Аналогично определяются множества правосторонних M^R, верхних M^U и нижних M^D прямоугольников.

Ясно, что в общем случае все множества $M^L,\ M^R,\ M^U,\ M^D$ могут быть непустыми. Если точно i штук (i $= 1,\ 2,\ 3\ ,\ 4$) из этих множеств не являются пустыми, то этот случай мы назовем i-сторонним случаем и обозначим любой последовательностью соответствующих непустым множествам букв. Например, если $M^L \neq \emptyset, M^D \neq \emptyset, M^R = M^U = \emptyset$, то имеем дело с двусторонним случаем LD или DL. Общий случай представляется любой последовательностью длины четыре (например $LDRU$).

В данной работе предложен полиномиальный алгоритм построения максимального взвешенного независимого множества прямоугольников для всех i - сторонних случаев (i $= 1,\ 2,\ 3,\ 4$). Сложность предложенных алгоритмов обозначим через $\varphi^i(n)$, где n − число прямоугольников, i $= 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Будем использовать также обозначение типа $\varphi^{LD}(n)$, для сложности алгоритма в случае LD.

Предложенные в работе алгоритмы имеют следующие сложности.

$$\varphi^{LD}\left(n\right) = O\left(n^5\right) \qquad \varphi^{DU}\left(n\right) = O(n^6)$$

$$\varphi^1(n) = O(n)$$

$$\varphi^2(n) = \max\left(\varphi^{LD}(n), \varphi^{DU}(n)\right) = O(n^6)$$

$$\varphi^3(n) = O(n^9)$$

$$\varphi^4(n) = O(n^{11})$$

Список литературы

[1] Гэри М., Джонсон Д., *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*, Мир, М., (1982).

[2] T. Asano. Difficulty *of the maximum independent set problem on intersection graphs of geometric objects*, In 6th ICTAG, (1991).

[3] J. Kratochvi, J. Nesetril. *INDEPENDENT SET and CLIQUE problems in intersection-defined classes of graphs*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 31, No.1, 85−93, (1990).

[4] P. Chalermsook and J. Chuzhoy. *Maximum independent set of rectangles,* In 20th annual ACM-SIAM SODA, 892−901, (2009).

[5] P. K. Agarwal, M. J. van Kreveld, and S. Suri. *Label placement by maximum independent set in rectangles,* Comput. Geom., 11(3−4), 209−218, (1998).