Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 38, 26–28, 2012.

Новые логические связки в суперинтуиционистских логиках: подход П.С.Новикова

А. Д. Яшин
Московский городской психолого – педагогический университет
E-mail: yashin.alexandr@ya.ru

В классической двузначной, а также интуиционистской, логике высказываний рассматриваются *стандартные* логические связки $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\neg$. Эквиваленция $\leftrightarrow$ вводится как сокращение:

$$A \leftrightarrow B \rightleftharpoons (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

Кроме того, можно вводить в язык стандартные логические константы 0 (ложь) и 1 (истина).

Класс Fm формул строится индуктивно из пропозициональных переменных и констант с помощью связок обычным путём.

Разные способы представления классической логики Cl и интуиционистской Int логик (семантические и дедуктивные) хорошо известны. Из них вытекает, в частности, включение

$$Int \subset Cl,$$

причём это включение собственное.

Отметим некоторые свойства этих логик:

а) Cl и Int замкнуты относительно правил подстановки и модус поненс ($A, A \rightarrow B/B$);

б) обе содержат т.н. *аксиомы (эквивалентной) замены* для стандартных связок:
$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$,
$(p \leftrightarrow q) \wedge (r \leftrightarrow s) \rightarrow (p \wedge r) \leftrightarrow (q \wedge s)$,
$(p \leftrightarrow q) \wedge (r \leftrightarrow s) \rightarrow (p \vee r) \leftrightarrow (q \vee s)$,
$(p \leftrightarrow q) \wedge (r \leftrightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow r) \leftrightarrow (q \rightarrow s)$.

Из этих аксиом вытекает *схема замены эквивалентных для произвольных формул*:

$$(p_1 \leftrightarrow q_1) \wedge \cdots \wedge (p_n \leftrightarrow q_n) \rightarrow (D(p_1, \ldots, p_n) \leftrightarrow D(q_1, \ldots, q_n)).$$

Из схемы замены эквивалентных вытекает замкнутость относительно правила замены эквивалентных (но не наоборот!):

$$\frac{(A_1 \leftrightarrow B_1) \wedge \cdots \wedge (A_n \leftrightarrow B_n)}{D(A_1, \ldots, A_n) \leftrightarrow D(B_1, \ldots, B_n)}.$$

Суперинтуиционистской логикой (с.и.л.) называют произвольное подмножество $L \subset Fm$, включающее интуиционистскую пропозициональную логику Int и замкнутое относительно правил modus ponens и подстановки.

Через $L + A$ обозначается наименьшая с.и.л., включающая логику L и содержащая формулу A.

Семейство с.и.л активно изучалось, в частности, оно оказалось континуальным.

В 50-е гг. 20 в. П.С. Новиков, по видимому, имея в виду активно развивающиеся разделы модальной логики (на основе классической двузначной логики), поставил задачу о возможности присоединения к данной с.и.л. (в частности, Int и Cl) новой одноместной операции. При этом он предложил свою трактовку "новизны" (в опубликованных работах самого П.С.Новикова описание его подхода найти не удалось, изложение основано на работах Я.С.Сметанича [1959,1960]).

Добавим к языку одноместную связку $\varphi(\cdot)$, расширенный класс формул обозначим через $Fm(\varphi)$, при этом формулы без φ будем называть *чистыми* (Я.С.Сметанич применял термин *формулы чистой логики*).

Под *φ-логикой* будем понимать произвольное подмножество $\mathcal{L} \subset Fm(\varphi)$, включающее Int и замкнутое относительно правил modus ponens, подстановки и замены эквивалентных (распространённые на расширенный класс формул).

φ-Логика $\mathcal{L}$ называется *консервативным расширением* с.и.логики L, если для всякой чистой формулы A из $A \in \mathcal{L}$ следует $A \in L$.

Далее, *явным соотношением для φ* называется формула вида $\varphi(p) \leftrightarrow B$, где B — чистая.

Естественно, что связка φ может считаться новой по отношению к стандартным связкам в φ-логике $\mathcal{L}$, если последняя не содержит никакого явного соотношения для φ.

П.С. Новиков предлагает более сильную трактовку: не только не содержит явного соотношения, но никакое явное соотношение не может быть присоединено! Точная формулировка такова:

Пусть L - с.и.л. φ-логика $\mathcal{L}$ определяет новую логическую связку в L, если выполнены следующие условия:

- $\mathcal{L}$ содержит аксиому замены для φ;
- $\mathcal{L}$ консервативна над L;
- для любой чистой формулы B φ-логика $\mathcal{L} + \varphi(p) \leftrightarrow B$ не консервативна над L (*невозможность присоединения явных соотношений*).

Первое условие введено, видимо, потому, что для стандартных связок оно выполнено (это условие сразу отметает целый ряд кажущихся возможными примеров типа аналогов классических модальностей, прецедентное отрицание, и др.). Второе условия означает, что связка φ является "экстрапонятием" по отношению к "исходной теории" L, и оно вместе с новыми способами умозаключений не должно "нарушать" исходную теорию. Наконец, "невозможность присоединения" трактуется с точки зрения нарушения консервативности.

В упомянутых выше работах Я.С.Сметанич привёл пример φ-логики, определяющей новую одноместную связку в Int, причём эта связка оказалась константной. А.В. Бессонов [1977] модификацией примера Я.С. Сметанича показал, что существует континуум φ-логик, каждая из которых определяет новую связку в Int.

Какие же из φ-логик заслуживают рассмотрения? П.С. Новиков предлагает рассмотреть максимальные консервативные расширения. Именно, φ-логика $\mathcal{L}$ *полна по Новикову* над L, если

- $\mathcal{L}$ содержит аксиому замены для φ;
- $\mathcal{L}$ консервативна над L;
- для любой формулы $B \in Fm(\varphi) \setminus \mathcal{L}$ φ-логика $\mathcal{L} + B$ не консервативна над L (*невозможность присоединения новых аксиом*).

Проблемой-минимум Новикова для L называется задача построения явного примера полной над L φ-логики с новой связкой. *Проблемой максимум* называется задача описания всего семейства пополнений для L.

В докладе предполагается рассказать о продвижениях в решении проблемы-минимум и проблемы-максимум.

Список литературы

[1] Сметанич Я.С. О полноте исчисления высказываний с дополнительной операцией от одной переменной// Тр. Моск. матем. об-ва.— 1960.—Т. 9.— С. 357—371.

[2] Сметанич Я.С. Об исчислениях высказываний с дополнительной операцией// ДАН СССР.— 1959.— Т. 139, № 2.— С. 309—312.

[3] Бессонов А.В. О новых операциях в интуиционистском исчислении высказываний// Матем. заметки.— 1977.— Т.22. Вып.1.— С.23—28.