Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 38, 23–25, 2012.

Свободные A-биполугруппы

Ю. М. Мовсисян, С. С. Давидов, М. Г. Сафарян
Ереванский государственный университет
E-mail: yurimovsisyan@yahoo.com, davidov@ysu.am, mher.safaryan@gmail.com

1. Предварительные понятия и результаты

Определение 1. Алгебра $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash)$ с двумя бинарными операциями называется A-биполугруппой, если она удовлетворяет следуюшим тождествам:

$$\begin{array}{l}(A1)\ (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z),\\ (A2)\ (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z),\\ (A3)\ (x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z),\\ (A4)\ (x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z).\end{array}$$

Пусть $e-$произвольный символ, введем следующие множества индексов:

$$I^n = \{0,1\}^{n-1} = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) : \varepsilon_k \in \{0,1\}, k = \overline{1, n-1}\},\ n > 1,$$

$$I^1 = \{e\},\ I = \bigcup_{n \geq 1} I^n.$$

Определение 3. Пусть $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash)$- A-биполугруппа. Для любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{A}$ и любого $\varepsilon \in I^n$ по индукции определим элемент

$$x_1 x_2 \dots x_n \varepsilon \in \mathcal{A} \tag{$\star$}$$

следующим образом:

1. $x_1 e = x_1$,

2. $x_1 x_2 \dots x_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-2}, 0) = x_1 \vdash x_2 \dots x_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-2})$,
 $x_1 \dots x_{n-1} x_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-2}, 1) = x_1 \dots x_{n-1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-2}) \dashv x_n$.

В частности, если $\varepsilon = (\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{n-1})$ то $x_1 \dots x_n \varepsilon = x_1 \dashv \dots \dashv x_n$, если $\varepsilon = (\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n-1})$ то $x_1 \dots x_n \varepsilon = x_1 \vdash \dots \vdash x_n$.

Теорема 1. Пусть $t = x_1 \dots x_n-$ терм в A-биполугруппе. Тогда существует такой индекс $\varepsilon \in I^n$, что

$$t = x_1 x_2 \dots x_n \varepsilon.$$

В силу теоремы 1 в A-биполугруппе, каждый терм t приводится к виду $(\star)$, который будем называть канонической формой терма t. Например, для терма $((x_1 \dashv x_2) \vdash (x_3 \dashv x_4)) \dashv (x_5 \vdash x_6)$ каноническая форма будет:

$$((x_1 \dashv x_2) \vdash (x_3 \dashv x_4)) \dashv (x_5 \vdash x_6) = (x_1 x_2(1) \vdash x_3 x_4(1)) \dashv x_5 x_6(0) =$$

$$x_1x_2x_3x_4(1,0,0) \dashv x_5x_6(0) = x_1x_2x_3x_4x_5x_6(1,0,0,1,1).$$

Покажем, что каноническая форма для каждого терма единственна, для чего нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Алгебра индексов $(I, \dashv, \vdash)$ является A-биполугруппой, где операции $\dashv, \vdash$ определяются следующим образом:

$$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \dashv (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}) = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{m}),$$

$$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \vdash (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}) = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, \overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{n}).$$

2. Основные результаты

Теорема 2. В A-биполугруппе каноническая форма единственна для любого терма.

Перейдем к определению свободной A-биполугруппы. Пусть $X-$ произвольное и не пустое множество, $n \in N$. Обозначим:

$$\mathcal{A}(X) = \bigcup_{n \geq 1} X^n \times I^n,$$

$$X^n = \underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_k \in X, k = \overline{1, n}\}.$$

Для удобства элементы $\mathcal{A}(X)$ обозначим через $(x_1, x_2, \ldots, x_n)\varepsilon$, вместо $((x_1, x_2, \ldots, x_n), \varepsilon)$, а множества $X \times I^1$ и X не будем различать: то есть символ $x \in X$ будем отождествлять с элементом $xe \in \mathcal{A}(X)$. Определим операции $\dashv, \vdash$ на $\mathcal{A}(X)$ следующим образом:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k)\varepsilon \dashv (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_l)\theta = (x_1, x_2, \ldots, x_l)\varepsilon \dashv \theta,$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k)\varepsilon \vdash (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_l)\theta = (x_1, x_2, \ldots, x_l)\varepsilon \vdash \theta.$$

Обозначим: $Y_n = X^n \times I^n$, $n \in N$.

Теорема 3. Бинарная алгебра $(\mathcal{A}(\mathcal{X}), \dashv, \vdash)$ является свободной A-биполугруппой с системой свободных образующих X.

Приведем другое описание для свободной A-биполугруппы. Пусть $F[X]-$ свободная полугруппа с системой свободных образующих X. Для каждого слова $\omega \in F[X]$ через $|\omega|$ обозначим длину слова ω. Определим операции $\dashv, \vdash$ на множестве

$$FA = \{(\omega, \varepsilon) \in F[X] \times I : \varepsilon \in I^{|\omega|}\}$$

следующим образом:

$$(\omega_1, \varepsilon) \dashv (\omega_2, \theta) = (\omega_1\omega_2, \varepsilon \dashv \theta),$$

$$(\omega_1, \varepsilon) \vdash (\omega_2, \theta) = (\omega_1\omega_2, \varepsilon \vdash \theta),$$

где $(\omega_1, \varepsilon), (\omega_2, \theta) \in FA$. Непосредственно проверяется, что бинарная алгебра $(FA, \dashv, \vdash)$ является A-биполугруппой, которую будем обозначать через $FA[X]$.

Теорема 4. A-биполугруппы $(\mathcal{A}(\mathcal{X}), \dashv, \vdash)$ и $FA[X]$ изоморфны.Следовательно, бинарная алгебра $FA[X]$ также является свободной A-биполугруппой с системой свободных образующих X.

Теорема 5. A-биполугруппа индексов $(I, \dashv, \vdash)$ свободна, и изоморфна A-биполугруппе $FA[X]$, где $|X| = 1$.

Таким образом, свободная A-биполугруппа ранга 1 совпадает с A-биполугруппой $(I, \dashv, \vdash)$ с точностью до изоморфизма.

Список литературы

[1] Yu.M.Movsisyan, *Boolean bisemigroup, Bigroups and Local Bigroups*, Computer Science and Information Technologies, September 19-23, 2005, p.97-105.

[2] А.В.Жучок, *Димоноиды, Алгебра и Логика*, 50, 4(2011), 471-496.

[3] J.-L.Loday, *Dialgebras* in J.-L.Loday, A.Frabetty, F.Chapton, and F.Goichot (editors), *Dialgebras and Related Operads*, Springer(2001), p.7-66.